

Darstellungsformen

von Geraden und Ebenen

Parameterform (für Geraden)
Parameterform (für Ebenen)
Normalenform (für Ebenen)
Koordinatenform (für Ebenen)
Hesse'sche Normalenform (für Ebenen)

Fähigkeiten

Sie sollten jede dieser Darstellungsformen kennen und benutzen können!

Speziell bei den Ebenen sollten Sie in der Lage sein, eine Form in eine andere umzuwandeln.

Aus zwei gegebenen Punkten sollten Sie eine Geradengleichung bestimmen können.

Aus drei gegebenen Punkten sollten Sie eine Ebenengleichung bestimmen können.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung sollten Sie unbedingt beherrschen.

Parameterform einer Geraden

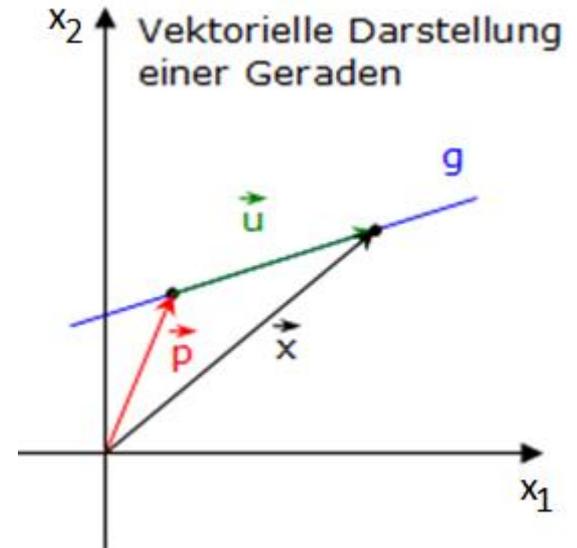
Eine Gerade bekommt man, indem man zu einem Punkt P auf der Geraden beliebige Vielfache eines Vektors addiert, der dieselbe Richtung wie die Gerade hat.

Parameterform:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

\vec{p} nennt man den **Stützvektor** und \vec{u} den **Richtungsvektor**.

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$



Aufgabe

Eine Gerade geht durch die Punkte $A(1|4|4)$ und $B(7|3| - 1)$.
Ermitteln Sie eine Parameterform dieser Geraden.

Lösung:

Verwende den Ortsvektor zu A als Stützvektor und den Verbindungsvektor von A nach B als Richtungsvektor.

$$\text{Mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{folgt } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Parameterform einer Ebene

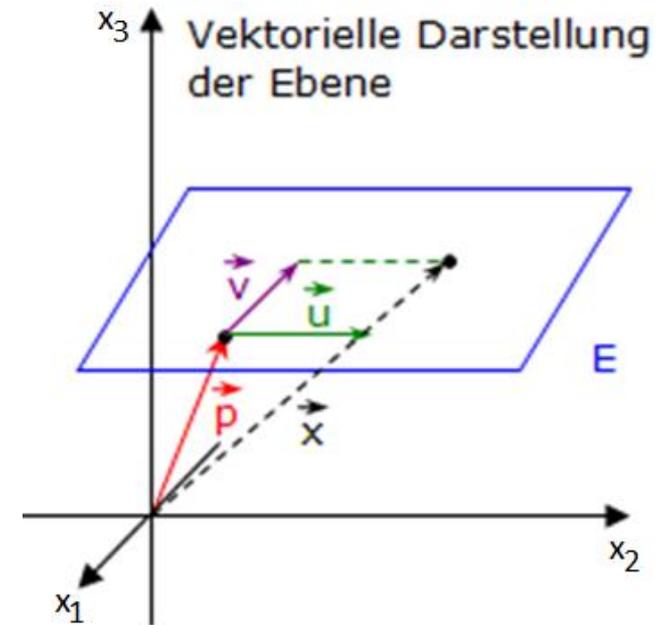
Bei Ebenen hat man ebenfalls einen Stützvektor aber zwei (linear unabhängige) Richtungsvektoren.

Parameterform:

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

↑ ↑ ↑
Stützvektor Richtungsvektoren

Beispiel: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$



Aufgabe

Ermitteln Sie eine Parameterform der Ebene, die durch die Punkte $A(2|6|-4)$, $B(-2|3|2)$ und $C(-4|3|4)$ geht.

Lösung

Wähle einen beliebigen Punkt, z.B. A , als Stützvektor. Gewöhnlich wählt man nun \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} als Richtungsvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$